Введение

Полезность нелинейных преобразований последовательностей для улучшения и даже индуцирования сходимости была достаточно продемонстрирована Шенксом. Однако эвристическая основа преобразований Шенкса имеет некоторые недостатки. Путём соответствующей модификации, предложенной Левиным, генерируются преобразования, которые дают значительное улучшение по сравнению с преобразованиями Шенкса. Дополнительным преимуществом является то, что преобразования выражены в простой замкнутой форме без необходимости вычисления высокопорядковых детерминант, как это происходит в некоторых преобразованиях Шенкса.

От Шенкса к Левину

Для последующего упоминания резюмируем подход Шенкса и преобразования, которые он получает. Шенкс начинает с последовательности

и, сравнивая её с «математическим транзиентом *k*-го порядка», то есть, как если бы *Ar* была бы функцией *r* вида

он может вычислить её «спектр амплитуд» *ai*, её «отношения» *qi* и её «базу» *B*. Здесь особое внимание уделяется вычислению базы B. Если {*Ar*} является математическим транзиентом, то есть, если он удовлетворяет (2), и если каждое отношение удовлетворяет , то очевидно, что

Если {*Ar*} является транзиентом и одно или более , *Ar* не сходится, и тогда Шенкс утверждает, что «*Ar* расходится от *B*», и называется «антипределом» {*Ar*}.

Но многие последовательности, которые возникают естественным образом при решении задач, являются математическими транзиентами, но мы можем во многих случаях сказать, что {*Ar*} почти *k*-го порядка для некоторого *k*, по крайней мере для r больше некоторого фиксированного *N*. Тогда по аналогии с (2) мы стремимся определить локальную базу *k*-го порядка *Bkn*, решая 2*k*+1 уравнений

(которые центрированы вокруг *An*) для 2*k*+1 величин *Bkn*, *ain*, *qin* (*i* = 1, 2, …, *k*), и рассматриваем *Bkn* как метод сходимости для {*Ar*}. Алгебраически мы получаем для *Bkn* формулу

где

Тогда преобразование Шенкса определяется как

а диагональное или *ed* преобразование Шенкса как

Обозначим

таким образом,

если мы определим

Таким образом, мы идентифицируем члены нашей последовательности {*Ar*} с частичными суммами бесконечного ряда

Тогда мы можем легко проверить, что (5) для *Bkn* также получается, если мы решим для *Bkn* систему уравнений

Здесь имеется только *k*+1 уравнений для *k*+1 величин *Bkn* и *βin* с *i* = 0, 1, 2, …, *k*-1.

Идея Шенкса заключается в том, чтобы рассматривать *Ar* как функцию *r*, вычисленную для целых значений r, и аппроксимировать эту функцию как сумму степеней с произвольными коэффициентами, как в (2), и таким образом, получать информацию о поведении последовательности при из конечного числа членов последовательности. В соответствии с (13), мы видим, что также можем рассматривать эту аппроксимацию функции *Ar* как аппроксимацию с помощью линейной комбинации функций am (как функций от m) для с произвольными коэффициентами и включая константный член *Bkr*. Шенкс показывает в своей статье, что если *Ar* являются частичными суммами степенного ряда разложения рациональной функции от *z*, то преобразование *ek* работает наиболее эффективным образом, так что при достаточно больших *k* и *n* является точно этой рациональной функцией во всей *z*-плоскости. Однако функции an очень похожи друг на друга, и кажется, неэффективным аппроксимировать функцию *Ar* с помощью линейной комбинации таких положений функций, как это делается в (13).

Кроме того, аппроксимация *Ar* с помощью линейной комбинации степеней может быть не подходящей для последовательностей, скорость сходимости или расходимости которых меньше скорости, с которой *qr* стремится к нулю или к бесконечности соответственно. В качестве примеров можно упомянуть последовательности *Ar* = *r-2* и *Ar* = *r2*.

Алгоритм Левина

Алгоритм Левина относится к классу нелинейных методов ускорения сходимости и основывается на построении преобразований, полученных в результате аппроксимации *Ar* с помощью других функций от *r*. Он имеет несколько вариаций. Рассмотрим каждую из них.

*t-преобразование*. По аналогии с (13) записываем *k*+1 уравнений для последовательности *A* = {*Ar*}:

где – функции от *r*, включающие *k* произвольных констант, и стремимся решить систему (14) для полагая, что должно быть аппроксимацией предела последовательности *A*. Если последовательность *A* расходится, но одномерная последовательность {*Br*}, которую мы можем сформировать из, стремится к пределу *b*, то мы будем называть *b* антипределом *A* = {*Ar*} относительно соответствующего преобразования.

В случае *k* = 1 получаем два уравнения

и хотим выбрать такое, чтобы

то есть, чтобы

Предположим, что каким-то образом мы нашли функцию . Тогда очевидно, что желательно улучшить эту аппроксимацию, поэтому для *k* > 1 мы определяем

где – константы, которые должны быть определены из (14), в то время как – функции от *r*, которые мы выберем на основе удобства и взаимной независимости. Уравнения (14) теперь принимают форму:

Для удобства обозначим , и мы получаем *Tkn* с помощью правила Крамера:

Детерминанты в не удобны для вычислений в общем случае, но для частного случая

и при условии, что для любого *n*, мы можем легко выразить их через детерминанты Вандермонда, деля последовательные столбцы на соответственно и разлагая по первой строке. Это элементарное вычисление даёт нам результат

Теперь нам нужно подходящее выражение для , которое обладает свойством, выраженным в (17). В этом и следующих разделах мы рассмотрим несколько возможных выражений для каждое из которых подходит для определённого класса последовательностей.

Известные преобразования, такие как

По аналогии с (13) теперь записываем *k*+1 уравнений для последовательности *A* = {*Ar*}

Стоит учитывать, что, следуя Шенксу, мы нумеруем члены нашей последовательности с *A0*. Однако дальше в некоторых случаях будет удобнее начинать с *A*1 как с первого члена последовательности.

Известные преобразования, такие как *ek* и преобразования Эйлера, часто значительно улучшают сходимость последовательностей, сформированных из частичных сумм чередующихся рядов:

Соответственно, мы сначала рассмотрим оценку для , которая подходит для таких последовательностей. Если мы предполагаем, что *dn* является достаточно гладкой функцией от n, и что

(когда последовательность расходится, *d* – антипредел), то очевидно, что

и более точно

В соответствии с (19) мы видим, что достаточно выбрать с точностью до константного множителя, и поэтому мы берём

Кроме того, является хорошей аппроксимацией для последовательности, которая расходится очень быстро, так как тогда *Ar* имеет порядок величины , и если *A* имеет антипредел *b* относительно разрабатываемого преобразования, то для больших *r*

что именно то, что мы требуем от (см. (17)). Соответственно, принимая , мы можем ожидать получения из (22) хороших аппроксимаций к пределу или антипределу последовательности, сгенерированной частичными суммами чередующегося ряда, и к антипределу очень быстро сходящегося ряда.

При условии, что для всех , мы подставляем в (22) и получаем

Мы видим из (29), что является взвешенным средним последовательности и использует , а сами веса зависят от . Таким образом, преобразование, заданное двумерной таблицей , является нелинейным.

Теперь определим *tk* преобразование аналогично *ek* преобразованию Шенкса:

Мы также определяем преобразование *td*

Это определение не соответствует диагональному преобразованию *ed* Шенкса, но и имеют общее – для последовательности *A* = {*Ar*}, начиная с *A1*, мы ассоциируем последовательность согласно

так что начинается с , тогда как , так и зависят лишь от . Мы предполагаем обозначить это слегка модифицированное диагональное преобразование Шенкса (лишь в индексации) как :

Таким образом, мы можем сказать, что и оба зависят от первых 2*n* + элементов последовательности *A*. Также в ряде случаев и оказываются наиболее эффективными преобразованиями из и соответственно.

Важно отметить принципиальную разницу между *t* и *e* преобразованиями. Обращаясь к (5) и (29), мы видим, что способ нумерации членов последовательности влияет на *t*, но не на *e* преобразования, так как индекс *n* появляется (то есть не только как индекс) в формуле для , но не в формуле для . Таким образом, *tk* на самом деле представляет собой целую последовательность преобразований в зависимости от того, как мы нумеруем первый член нашей последовательности. Например, можно нумеровать члены последовательностей с *A1*, но нетрудно придумать примеры (например, частичные суммы экспоненциального ряда *e-x* для больших положительных *x*), где другая нумерация даёт лучшие результаты.

*Свойства tk и td преобразований*. Преобразования *tk*, *td*, или в общем, любое преобразование *t*, которое мы можем сформировать их (29), не являются линейными, но, как и с преобразованиями Шенкса, есть два простых, но важных свойства:

где *C* используется для обозначения последовательности

содержащей каждый член, равный одной и той же константе *c*. Доказательство этого элементарно.

Преобразования *tk*, *td* не являются регулярными, то есть существуют сходящиеся последовательности, для которых *tk* и *td* приводят к последовательностям, которые расходятся или имеют другой предел, но если *A* является последовательностью частичных сумм сходящегося ряда, то и сходятся к пределу *A*. Это можно показать, записав преобразование *tk*, например, в форме метода суммирования , где . Тогда для фиксированного чередующегося ряда *A* мы можем использовать теорему Сильвермана-Тёплица, чтобы показать, что является регулярным методом суммирования, который, в частности, суммирует *A* к его пределу.

Покажем, в какой степени улучшение сходимости – общее правило. Укажем улучшение, достигнутое *t1*, *t*2 при применении к определённому классу чередующихся рядов. В первую очередь, мы можем отметить из выражений для *tk* и *ek*, что *t1* = *e1*. Кроме того, для *e1* Шенкс доказал следующий результат:

Если – полиномы степеней *M1*, *M2* соответственно, и не обращается в ноль при *m* – положительном целом числе или нуле, и если

то

Это даёт меру улучшения сходимости, достигнутого , при применении к последовательности (37). Теперь мы хотим установить результат этого типа для *t2*.

Предположим теперь, что *A* = {*An*} является последовательностью

когда и имеет разложение вида

и для *m* – положительного целого числа. Тогда нетрудно по вычислению, аналогичному тому, что у Шенкса, показать, что

Легко показать, что, если *A* сходится, сходится к тому же пределу, и (41) показывает улучшение, достигнутое в скорости сходимости.

*u-преобразование*. Рассмотрим последовательность

для которой

Как объяснялось раннее, мы не ожидаем, что или будут особенно эффективны для этого ряда, и вычисления это подтверждают. Однако простым изменением мы можем получить преобразование, которое даёт очень хорошие результаты для таких медленно сходящихся монотонных рядов.

Рассмотрим ряд

когда имеет асимптотическое разложение

и , так что ряд сходится. Мы пытаемся получить выражение для , которое подходит для такого рода. Запишем

и тогда в соответствии с (17) нам нужно

Мы можем легко оценить этот остаток, рассматривая выражение (45) для как функцию от *n*, определённую для всех положительных действительных *n*, и сравнивая

с интегралом

Таким образом, мы находим

и так как достаточно определить с точностью до константного множителя, то целесообразно взять

Мы подставляем это в (22) и получаем величину , заданную

Здесь стоит отметить, что это уравнение для очень похоже на (29) для и может быть получено из (19), взяв как прежде, но выбрав вместо как в (21).

Так же, как с помощью мы определили *t*-преобразования, мы теперь определяем *u*-преобразования с помощью . В особенности, мы определяем

Как для *t*-преобразований, мы наблюдаем, что *u*-преобразования удовлетворяют условиям (34) и (35), и можем показать, что последовательности частичных сумм сходящихся чередующихся рядов преобразуются в последовательности, сходящиеся к тому же пределу, и кажется, что для таких последовательностей *t* и *u* оказывают примерно одинаковую степень улучшения скорости сходимости. Однако для медленно сходящихся монотонных последовательностей *u*-преобразования более эффективны.

*v*-преобразования. v-преобразование, которое мы сейчас представим, является примером использования известных преобразований для получения более эффективных преобразований. Начнём с преобразования , применённого к любой последовательности .

Предполагая, что является аппроксимацией предела или антипредела *A*, мы можем использовать (17), чтобы получить выражение для :

Подстановка этого значения для в (22) даёт

и используя , мы определяем *v*-преобразования

Также *v*-преобразования имеют свойства (34) и (35), и они регулярны для последовательностей, сгенерированных как частичные суммы чередующихся рядов. *v*-преобразования так же хороши, как t- или u-, разница же заключается в том, что они хороши для обоих типов рядов.

Заключение

Полученные преобразования могут быть применены к вычислению бесконечных интегралов от осциллирующих функций путём интегрирования между нулями функции, а затем преобразования полученного чередующегося ряда. Также, как другое применение, можно упомянуть улучшение простой численной интеграции.

Во многих случаях последовательность будет монотонной, и тогда обычные методы для ускорения сходимости не так эффективны. Но тогда *u*- или *v*-преобразование должно быть подходящим.

Преобразования *t*-, *u*-, *v*- могут быть использованы для генерации рациональных аппроксимаций функций , имеющих формальные разложения в степенные ряды. При определённых условиях эти аппроксимации превосходят сопоставимые члены таблицы Паде функции .

Список литературы

1. Scalar Levin-type sequence transformations // Homeier H.H.H. - 2018. – P. 1-58.
2. On remainder estimates for Levin-type sequence transformations // Computer Physics Communications // Homeier H.H.H., Weniger E.J. - 1995. – P. 1-10.
3. Mathematical properties of a new Levin-type sequence transformation // Weniger E. J. - 2004. – P. 1-45.
4. Non-Linear Transformations of Divergent and Slowly Convergent Sequences // Shanks D. C. – 1955. – P. 1-42.
5. Development of non-linear transformations for improving convergence of sequences // International Journal of Computer Mathematics // Levin D. A. - 1972. – P. 371-388.